$$x_3 \approx \frac{-0.494+\sqrt{-0.635984}}{2}$$
$$x_4 \approx \frac{-0.494-\sqrt{-0.635984}}{2}$$

dos ceros complejos

Los ceros aproximados de F son $x_1 = -1$, $x_2 \approx 4.494$ $x_3 \approx \frac{-0.494+\sqrt{-0.635984}}{2}$ y

$$x_4 \approx \frac{-0.494-\sqrt{-0.635984}}{2}$$

Ejercicio 2) Realiza un bosquejo de la gráfica de $F(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x - 1$.

Ejercicio 3) Determina los ceros aproximados y traza un bosquejo de la gráfica de cada función.

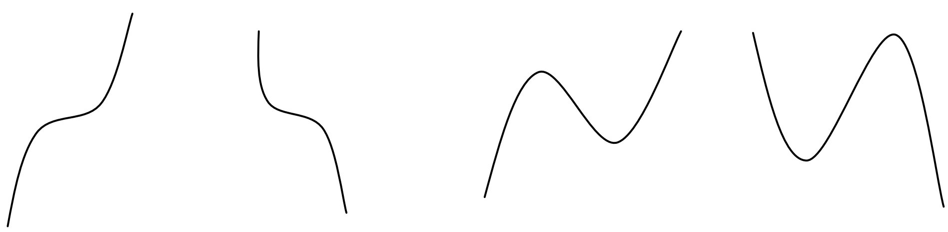
a) $H(x) = -x^3 + 13x + 7$
b) $L(x) = -x^4 + x^2 + 3x + 1$
c) $M(x) = 3x^3 + 10x^2 - 13x + 9$
d) $N(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
e) $B(x) = 3x^4 - 22x^3 + 42x^2 - 4x - 28$
f) $C(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 20x$

1.5 BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL.

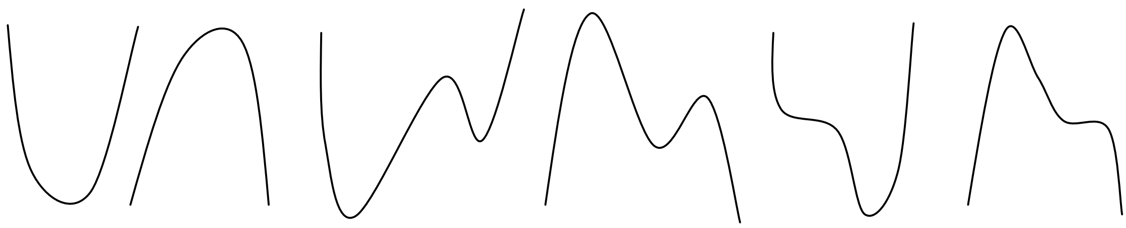
$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Con lo que hemos venido realizando te diste cuenta que para trazar la gráfica exacta de una función polinomial es muy laborioso porque hay que ir evaluando en varios puntos dependiendo de que tan bien la queramos trazar, pero delinearla o hacer un bosquejo de esta no es tan grave si conocemos algunos puntos clave como son: las intersecciones con los ejes, el signo del coeficiente principal y si el exponente mayor (n) es impar o par.

También observaste que la gráfica de una función polinomial de tercer grado solo puede tener una de las cuatro formas siguientes:



La gráfica de una función polinomial de cuarto grado puede tener una de las seis siguientes formas:



Seguiremos haciendo algunos ejemplos donde nos den la función o algunas características de ella para que obtengamos su expresión.

Intersecciones de la gráfica con los ejes cartesianos

Ejemplo 1) Bosqueja la gráfica de la función $f(x) = (x - 2)(x - 5)(x + 1)$

Solución.-

La función esta factorizada y es de tercer grado (tiene tres factores), así que nos están dando los puntos por donde cruza al eje x o sea los ceros de la función que son: 2, 5 y –1 ¿cómo los obtuvimos?

La intersección con el eje y la obtenemos evaluando la función en x= 0

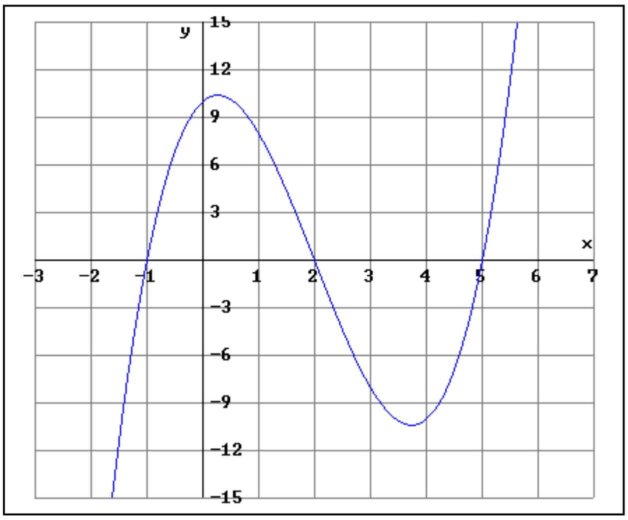
$$F(0) = (0 - 2)(0 - 5)(0 + 1) = 10$$

El valor del coeficiente principal es $a_3=1$ esto lo obtenemos eliminando los paréntesis: $(x - 2)(x - 5) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

$$(\qquad\qquad\qquad)(x + 1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

La gráfica de esta función pasa por: (2, 0), (5, 0), (-1, 0) y por (0, 10) como el coeficiente principal es positivo, la rama a la izquierda de (-1, 0) se extiende hacia abajo y la rama a la derecha de (5, 0) se extiende hacia arriba, así que sube baja y vuelve a subir, la función toma valores negativos hasta llegar a –1, de –1 a 2 toma valores positivos, de 2 a 5 toma valores negativos y después de 5 toma valores positivos, ahora para tener una mejor bosquejo de la gráfica evalúa la función en otros puntos los que consideres necesarios y márcalos sobre la curva dada a continuación.



Los tres ceros de la función nos definen cuatro regiones o intervalos que son:

de menos infinito hasta –1	$(-\infty, -1)$
de –1 hasta 2	$(-1, 2)$
de 2 hasta 5	$(2, 5)$
de 5 hasta infinito	$(5, \infty)$

Ejercicio 1) Bosqueja la gráfica de las siguientes funciones
a) $F(x) = (x + 3)(x - 4)x$ b) $G(x) = -(x - 3)(x + 1)^2$ c) $H(x) = -(x + 2)(x + 6)(x - 1)$
d) $M(x) = 2x^3 + 9x^2 + 3x - 4$ e) $L(x) = -x^3 - 2x^2 + 10x - 25$

Ejemplo 2) Dibuja la gráfica de $g(x) = -(x + 3)(x - 1)(x^2 - 5x + 7)$
Solución.-
La función g es de cuarto grado porque tiene dos factores lineales y uno cuadratico, los ceros de la función son cuatro dos los encontramos con los factores lineales, así que –3 y 1 son dos de los ceros de g, los otros dos los encontramos resolviendo la ecuación de segundo grado: $x^2 - 5x + 7 = 0$

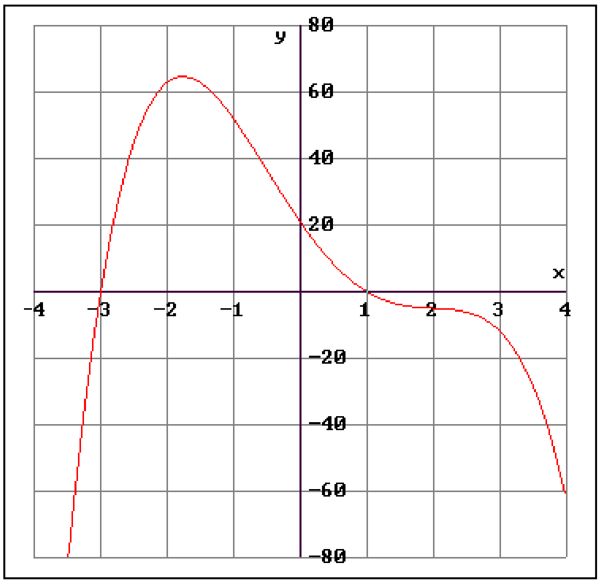
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

son ceros complejos, así que la función g tiene dos ceros reales y dos ceros complejos

Cruza el eje x en –3 y 1 y al eje y lo cruza en: -(3)(-1)(7) = 21

El valor del coeficiente principal es $a_4 = -1$

Tanto la rama de la derecha como la de la izquierda se extienden hacia abajo
Los ceros de la función o raíces de la ecuación que resulta al darle el valor a g de cero nos definen 3 regiones que son: $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $(1, \infty)$, evalúa la función en otros puntos y márcalos sobre la curva dada.



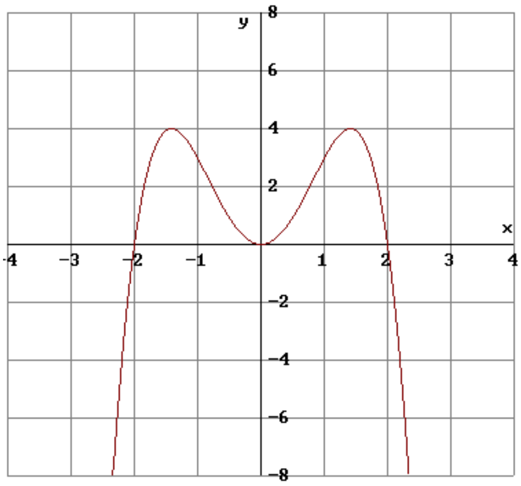
Debemos recordar que cuando las raíces son sencillas la curva cruza al eje x en forma directa, cuando son dobles al irse acercando a la raíz la curva se parece a una parábola ya sea hacia arriba o hacia abajo, cuando son triples al aproximarnos a la raíz la curva se comporta como una cúbica que al cruzar el eje x cambia de concavidad.

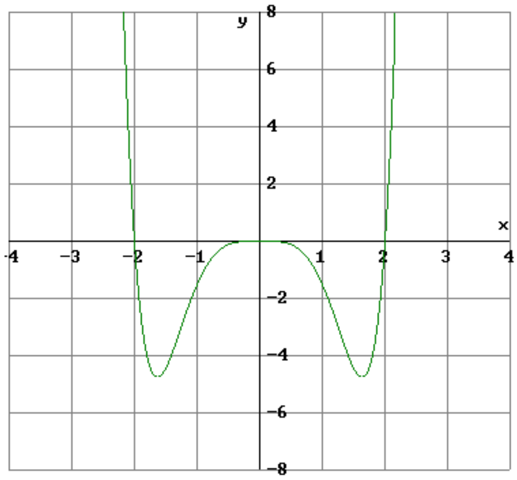
Ejercicio 2) Traza un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

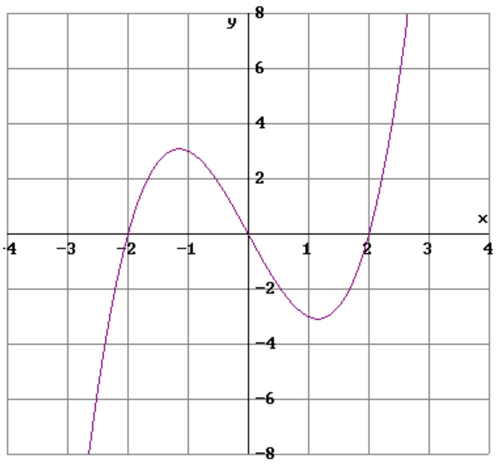
a) $f(x) = (x - 3)^2(x^2 - 1)$ b) $g(x) = -(x - 4)(x + 2)^3$ c) $h(x) = x(x + 3)(x^2 + 5x - 8)$
d) $m(x) = -(x - 2)^2(x + 1)^2$ e) $n(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 3)x^2$

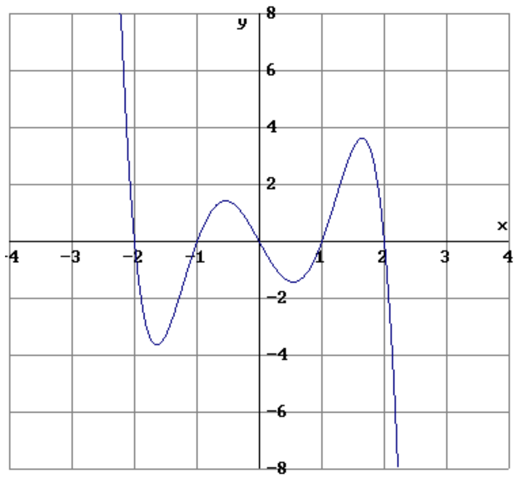
Ejercicio 3) A cada gráfica asígnale una de las siguientes funciones polinomiales y explica tu elección.

a) $P(x) = x(x^2 - 4)$ b) $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$
c) $R(x) = -x^5 + 5x^2 - 4x$ d) $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$





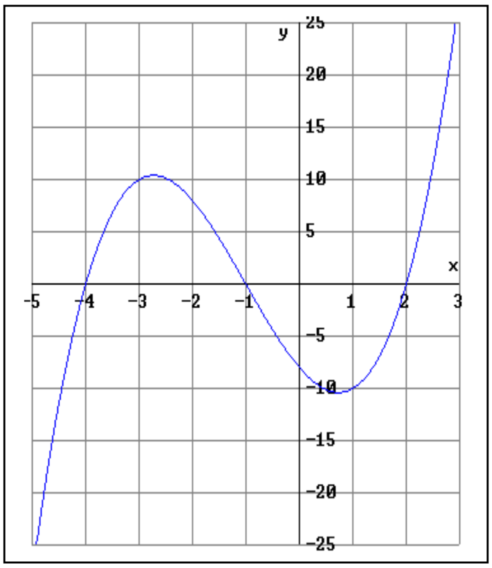




Indice de crecimiento (alargamiento o compresión)

Aquí lo que vamos a observar es que es lo que le sucede a una función polinomial cuando se multiplica por una cantidad determinada. Suponemos que conocemos la gráfica de la función y multipliquemos por diferentes cantidades.

Ejercicio 1) Dada la gráfica de la función f(x)=(x – 2)(x + 4)(x + 1), completar la siguiente tabla y trazar las gráficas de: y = 2f(x) y y = 1/2f(x)



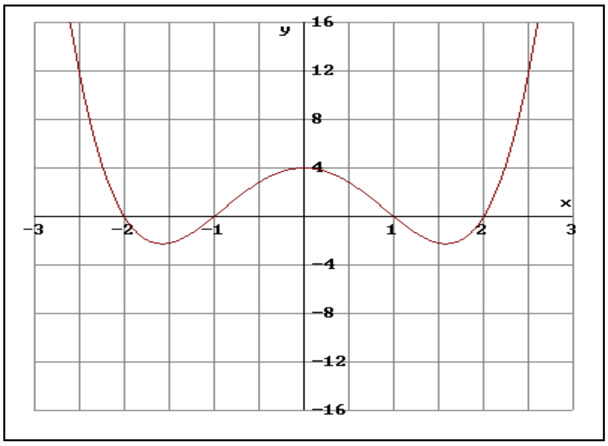
x	$f(x)$	$2f(x)$	$\frac{1}{2}f(x)$
-5	-28		
-4	0		
-3	10		
-2	8		
-1	0		
0	-8		
1	-10		
2	0		

- ¿Cuándo se multiplica por 2 que observaste?______________________________
- ¿Cuándo se multiplica por ½ que sucede? _______________________________
- ¿Cómo son los ceros de estas tres funciones? ________________¿A que se debe esto?____
- Qué pasaría si multiplicáramos por una cantidad negativa?_________________
- Si tenemos los ceros de la función, cuantas funciones se podrían determinar con esos mismos ceros ________________
- Para que la función sea única que necesitamos aparte de sus ceros ____

Como te diste cuenta cuando multiplicamos a la función por una cantidad, si la cantidad es mayor que 1 la gráfica se alarga verticalmente y si esta cantidad se encuentra entre cero y uno la gráfica se comprime verticalmente, pero sus ceros no cambian porque esta cantidad es un factor numérico. Así que si tenemos una función de la forma $y = kf(x)$ y conocemos la forma de $f(x)$ podemos trazar la gráfica de y alargando o comprimiendo a $f(x)$ según sea el valor de k.

Ejercicio 2) Dada la gráfica traza las gráficas de las funciones que se piden y escríbelas en su forma polinomial.

$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$



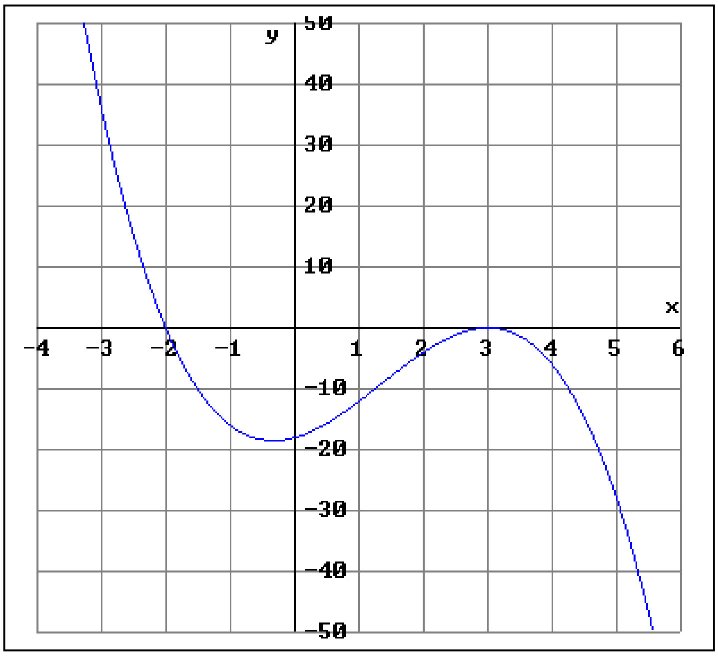
a) $y = 3f(x)$

____

b) $y = -2f(x)$

____

$G(x) = -(x-3)^2(x+2)$



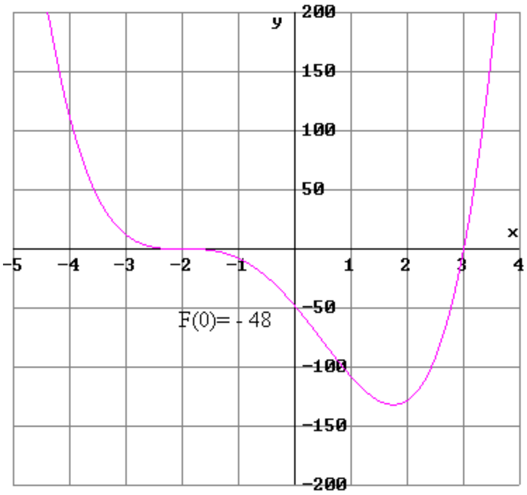
c) $y = \frac{1}{3}G(x)$

____

d) $y = -2G(x)$

____

Ejercicio 3) Dada la siguiente gráfica que función representa.



Solución.-

- La función debe ser de grado _____, ya que las ramas de los dos extremos se extienden hacia _______________.
- 3 es un cero sencillo ya que cruza _________________.
- -2 es un cero ____________ ya que en ese punto la curva al cruzar cambia de _____________________
- La curva representa a una función de grado _________

- Los factores de la función son: (x   )   y   (x   )
- La función buscada en su forma factorizada la podemos escribir como:

$$F(x) = k\,(x-3)(x+2)(x+2)(x+2) = k\,(x-3)(x+2)^3$$

- Como F(0) =– 48 se sustituye el valor de x = 0 en la expresión anterior

$$-48 = k\,(x-3)(x+2)^3 = k(-3)(2)^3 = k\,(-24)$$

$$k = -48/-24 = 2$$

La función representada por la gráfica es: $\mathbf{F(x) = 2\,(x-3)(x+2)^3}$

Eliminando los paréntesis (x + 2)(x +2) = ______________________

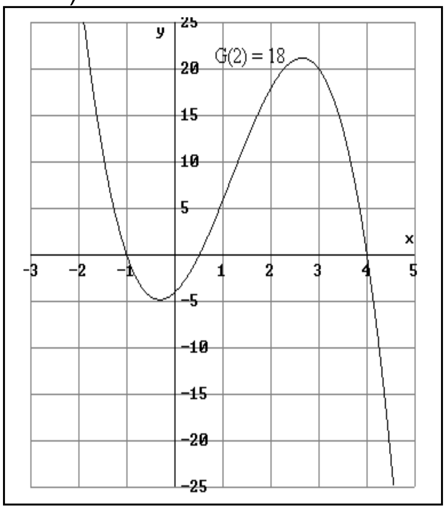
$$(x+2)^3 = (x^2+4x+4)(x+2) = x^3+2x^2+4x+8$$

$$(x^3+2x^2+4x+8)(x-3) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

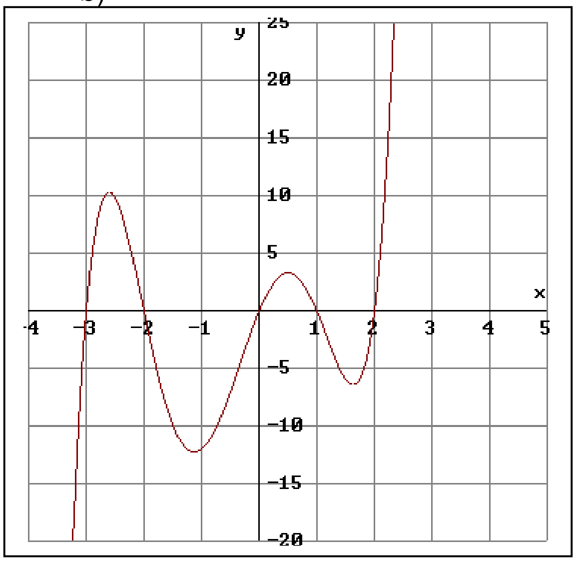
$$F(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ejercicio 4) Dadas las siguientes gráficas encuentra la función polinomial de grado menor que las represente.

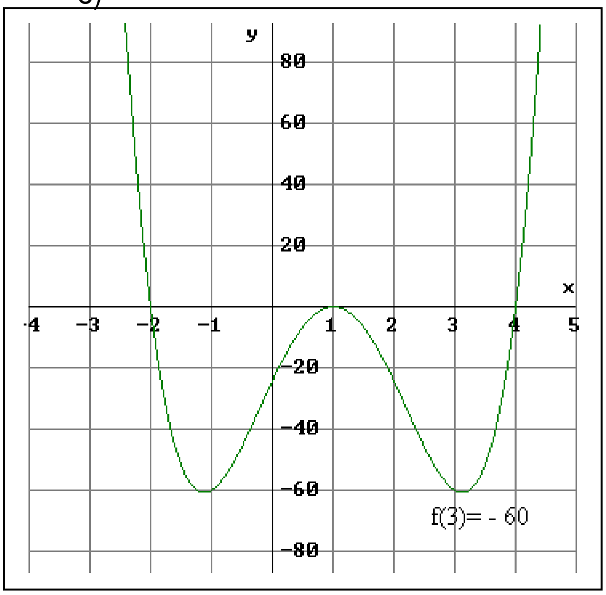
a)



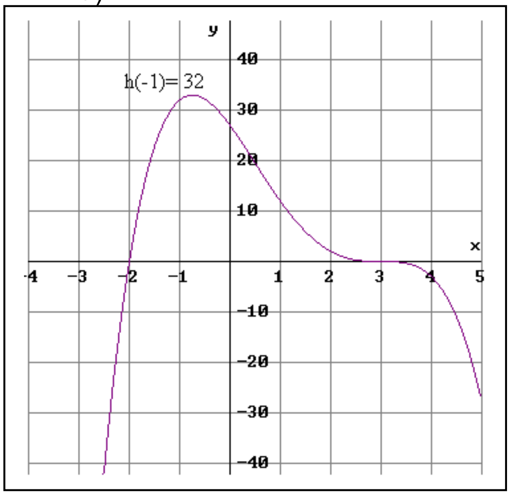
b)



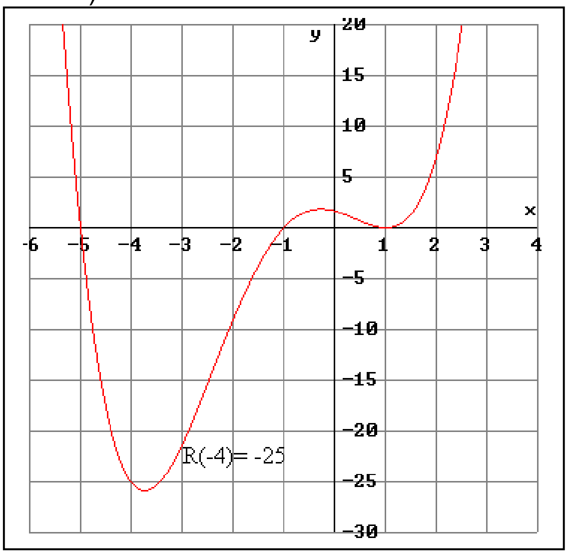
c)



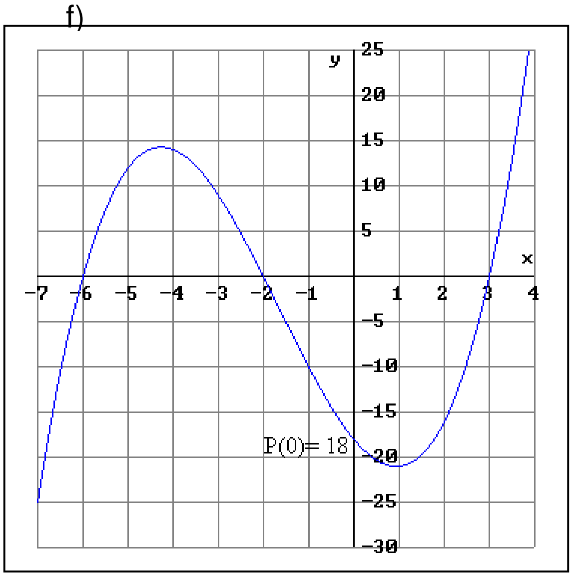
d)


y
40
h(-1)= 32
30
20
10
x
-4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−10
−20
−30
−40

e)


y
20
15
10
5
x
-6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−5
−10
−15
−20
R(-4)= -25
−25
−30

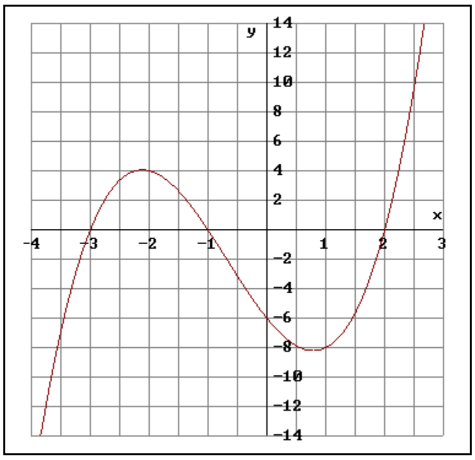
f)


y
25
20
15
10
5
x
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−5
−10
−15
P(0)= 18
−20
−25
−30

Traslación horizontal y vertical

Ya sabemos como trasladar a las funciones polinomiales con un solo término ahora vamos a ver como trasladar una función polinomial en general y para esto vamos a realizar algunos ejercicios.

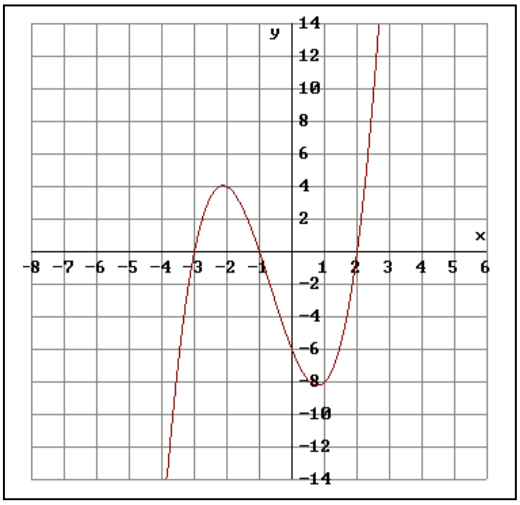
Ejercicio 1) Dada la gráfica de f(x) = (x +1) (x –2)(x + 3), traza las siguientes gráficas: a) y = f(x) + 6 b) y = f(x) – 4



¿Cómo lo harías?

Si ya lo hiciste creo que la mejor forma es tomar puntos sobre la curva y desplazarlos 6 unidades hacia arriba o 4 unidades hacia abajo según sea el caso y esto es lo mismo que hicimos en la sección 1.3. Así que si a la función le sumamos o restamos una cantidad su gráfica se desplaza verticalmente hacia arriba o hacia abajo respectivamente

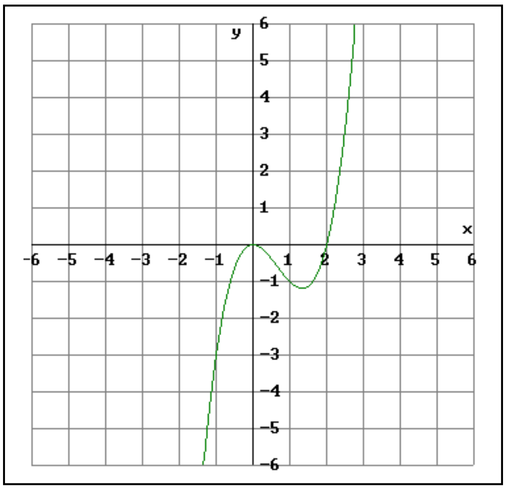
Ejercicio 2) Dada la gráfica de la función f(x) = (x +1)(x – 2)(x + 3), traza la gráfica de las siguientes funciones: a) g(x) = f(x + 3) b) h(x) = f(x – 2)



¿Cómo lo harías?

Espero que se te haya ocurrido como hacerlo, sino simplemente tomamos algunos puntos sobre la curva y ahora los desplazamos horizontalmente ya sea 3 unidades a la izquierda o 2 unidades a la derecha según el inciso respectivo nuevamente sucede lo mismo que vimos en la sección 1.3. Si ahora le sumamos o restamos a x una cantidad la gráfica resultante se desplaza sobre el eje x ya sea a la izquierda o hacia la derecha.

Ejercicio 3) La gráfica de $F(x) = x^3 + 2x^2$ es la siguiente. Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones.



a) $P(x) = F(x) + 3$

b) $Q(x) = F(x + 5)$

c) $R(x) = F(x - 3) - 2$

d) $S(x) = 2F(x - 2)$

Ejercicio 4) La gráfica de $G(x) = x^4 - 9x^2$ es la siguiente. Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $F(x) = -G(x) + 10$

b) $H(x) = 1/2G(x - 3)$

c) $I(x) = G(x + 4) - 5$

d) $J(x) = -G(x - 2)$